



ریاضی به روش گفتگو

خسرو داودی و آرش رستگار

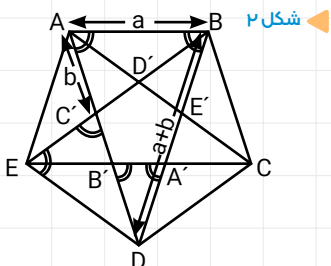
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و نشان دهید طرف چپ برابر صفر است.^۱

اما توجه کنیم که معادله درجه دو باید دو ریشه داشته باشد. پس شاید ϕ که در معادله $x^2 - x - 1 = 0$ صدق می کند برابر ریشه دیگر باشد!

حامد: حدس من این است که ریشه دیگر $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ است. اگر محاسبه های خودت را به دقت دنبال کنی خواهی دید که من درست می گویم. اما نکته این است که $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ عددی منفی است، در حالی که نسبت طلایی عددی مثبت است. پس به ناچار داریم: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

آقای طلایی از مکالمه های حامد و احمد خیلی خوش حال شد و چشم هایش برق زد و گفت: «بگذارید شما را امتحان کنم. آیا می توانید نشان دهید نسبت قطر به طول ضلع در یک پنج ضلعی منتظم نیز برابر عدد طلایی است.»

حامد به سرعت یک پنج ضلعی کشید و رأس های آن را نام گذاری کرد. او برای اینکه هندسه پنج ضلعی را بهتر بفهمد همه قطره های آن را رسم کرد.



دست به کار شوید و ببینید می توانید این نسبت را محاسبه کنید.

حامد و احمد: که همیشه با هم مسئله حل می کردند دست به کار شدند. حامد در هندسه و تفکر تصویری قوی بود و احمد در جبر و تفکر کلامی و نمادین. به همین دلیل همکاری آن ها همیشه به پایان خوبی می انجامید.

حامد: از تشابه مستطیل ها داریم: نسبت طول به عرض برابر است، پس: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ بنابراین با ضرب کردن دو طرف در ab داریم:

$$a^2 = b(a+b) \\ = ba + b^2$$

$$a^2 - b^2 = ab$$

$$(a-b)(a+b) = ab$$

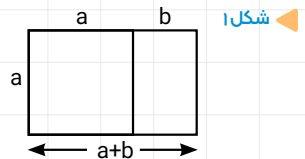
که تساوی جالبی است. ضرب دو عدد برابر است با ضرب مجموع آن ها در تفاضل آن ها!

احمد: اما ما با نسبت $\frac{a}{b}$ سروکار داریم. آن را با ϕ نمایش می دهیم که یک حرف یونانی است. چون قبلاً در کتاب ها دیده ام که عدد طلایی را با ϕ نمایش می دهند.

از رابطه $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ داریم: $\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$ پس: $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$

رابطه را در ϕ ضرب کنیم، داریم: $\phi^2 = \phi + 1$ پس ϕ ریشه این معادله درجه دوم است: $x^2 - x - 1 = 0$. به سادگی می توان دید $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ریشه این معادله است. کافی است به جای x قرار دهید:

آقای طلایی هم معلم جبر بود و هم معلم هندسه! او جبر و هندسه را با هم ترکیب می کرد و هر دورا به دانش آموزان می آموخت. **آقای طلایی:** زیباترین مستطیل به نظر شما کدام مستطیل است؟ یک منظر این است که زیباترین مستطیل، مستطیلی است که ساختار پنهان ساده ای داشته باشد. برای مثال فیثاغورسیان داخل مستطیل یک مربع جای می دادند و این طور فکر می کردند که اگر مستطیل کوچک باقی مانده شبیه همان مستطیل اولیه باشد، این یک ساختار پنهان ساده است که موجب می شود ما ناخودآگاه این مستطیل را زیبا ببینیم.



در شکل ۱، اگر مستطیل کوچک متشابه مستطیل بزرگ باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

آیا می توانید نشان دهید که در این صورت همیشه خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

از فیثاغورس و اقلیدس در یونان باستان تا ریاضی دان ایتالیایی لئوناردو پیزا، و منجم عصر رنسانس، کپلر تا دانشمندان بزرگ هم عصر ما، مانند راجر پنروز و بسیاری زیست شناسان، هنرمندان، تاریخ دانان، معماران، روان شناسان و حتی عرفا، درباره این نسبت تحقیق کرده اند. در مورد آن بیشتر از این خواهیم گفت، اما شما اول

احمد: می‌توان هم با یک مستطیل $k \times l$ از مربع‌های به طول a شروع کرد و بعد مستطیلی کنار آن قرار داد که با کل شکل متشابه باشد (شکل ۷).

شکل ۷



در این صورت: $\frac{ka+b}{la} = \frac{la}{b} (=lu)$
یعنی اگر قرار دهیم: $\frac{a}{b} = u$ داریم:

$$\frac{k}{l} + \frac{1}{lu} = lu$$

بنابراین: $ku+1=l^2u^2$ و لذا: $ku+1=l^2u^2$

پس $\frac{k+\sqrt{k^2+4l^2}}{l}$ عددی گنگ است!

اما می‌دانیم هر عدد اول p که باقی‌مانده

آن بر چهار مساوی یک باشد، به شکل

k^2+4l^2 است. این شد یک اثبات

هندسی برای گنگ بودن $\sqrt{p}$ وقتی p

چنین عدد اولی باشد. چون اگر lu گنگ

باشد، آنگاه u نیز چنین است.

آقای طلایی رو به دانش‌آموزان کرد

و گفت: «آیا می‌توانید اثبات احمد را

دقیق کنید؟ در این اثبات آخر احمد

اشکالی هست. چون: $k^2+4l^2=m^2$

همان معادله فیثاغورس است و

چندین جواب دارد. اگر k^2+4l^2 مربع

کامل باشد، دیگر $\sqrt{k^2+4l^2}$ عددی گنگ

نخواهد بود.

احمد چه اشتباهی مرتکب شده است؟

پی‌نوشت

۱. در پایه دهم با معادله درجه دوم آشنا می‌شوید. به

شما خواهند آموخت که اگر یک معادله درجه دوم به

صورت $ax^2+bx+c=0$ داشته باشیم، پاسخ یا جواب

معادله (یعنی x) یا ریشه‌های معادله مزبور را می‌توان

از این رابطه به‌دست آورد: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

این ترتیب برای معادله $x^2-x-1=0$ خواهیم داشت:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

اما با توجه به اینکه شما

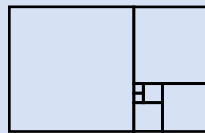
هنوز معادله درجه دوم را نخوانده‌اید، می‌توانید با

قرار دادن $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ در معادله نشان دهید که این

عدد پاسخ معادله است.

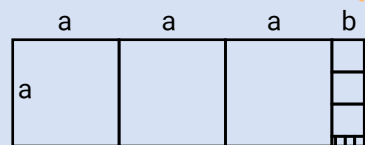
۴ یک اثبات از گنگ بودن عدد طلایی است.

شکل ۴



احمد: اگر به جای یک مربع، k مربع پشت سر هم قرار دهیم (شکل ۵) و بعد یک مستطیل کوچک که با کل شکل متشابه باشد، رسم کنیم، نشان داده‌ایم که عددهایی به شکل $\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ گنگ هستند.

شکل ۵



زیرا: $\frac{ka+b}{a} = \frac{a}{b} = t$ ، پس: $k + \frac{1}{t} = t$

و از آنجا داریم: $t^2 - kt - 1 = 0$ که ریشه آن

همان $\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ است. اگر به جای t

بگذارید: $\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ خواهیم دید که

راست می‌گوییم. در حالت $k=2$ داریم:

$$\frac{2+\sqrt{2^2+4}}{2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$$

که اثباتی هندسی برای گنگ بودن $\sqrt{2}$

است! جل‌خالق!

حامد: عجب! نگاه کنید بدون رابطه

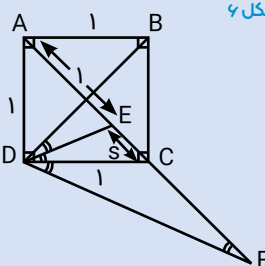
فیثاغورس می‌توانم ثابت کنم طول

قطر مربع واحد $\sqrt{2}$ است. به شکل ۶

و تشابه مثلث‌های $\triangle ADF$ و $\triangle DEC$

توجه کنید:

شکل ۶



داریم: $\frac{AF}{AD} = \frac{DC}{EC}$ ، پس: $\frac{1}{S} = \frac{1}{2} + S$ و

لذا: $0 = S^2 + 2S - 1$ که می‌گوید: $S = \sqrt{2} - 1$.

جای‌گذاری کنید.

حامد: با یک نگاه به شکل می‌توان گفت که مثلث‌های کوچک، مانند $\triangle DA'B'$ ، باید مثل مثلث‌های کمی بزرگ‌تر، مانند $\triangle DEC$ و مثلث‌های بزرگ‌تر مانند $\triangle DAB$ ، مثلث‌هایی متساوی‌الساقین باشند. این نکته با محاسبه زاویه‌های شکل ۲ به راحتی قابل اثبات خواهد بود.

در مثلث‌های متساوی‌الساقین $\triangle DAB$ و $\triangle ABE$ نسبت ساق به قاعده برابر خواهد بود. اگر طول ضلع پنج‌ضلعی را a بگیریم و AC' را b بنامیم، خواهیم داشت: $\frac{DB}{AB} = \frac{AB}{AC'}$ که یعنی: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

این همان رابطه مستطیل طلایی است!

آقای طلایی: آفرین! فیثاغورسیان و بعد

سایر یونانیان به همین دلیل ارتباط عدد ϕ

با هندسه آن را مطالعه می‌کردند. هپاسوس

در سال ۴۵۰ ق.م نشان داد که ϕ نمی‌تواند

عددی گویا باشد و غوغایی به پا کرد.

روش هپاسوس برای اثبات گنگ بودن عدد

طلایی هندسی بود و از الگوریتم اقلیدسی

استفاده می‌کرد. روش او بر این مبنا استوار

بود که اگر مستطیلی با ضلع‌های صحیح

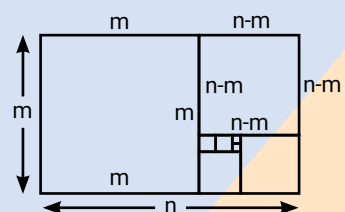
را با مربع‌هایی به صورتی که در شکل ۳

می‌بینیم بپوشانیم، در نهایت به یک مربع

واحد می‌رسیم که در متناهی مرحله، کار

پایان می‌یابد.

شکل ۳



اما هپاسوس نشان داد که این روش برای

a و b با نسبت عدد طلایی کار نمی‌کند و

برای این کار از هندسه پنج‌ضلعی منتظم

استفاده کرد. آیا می‌توانید نشان دهید

اگر یک مستطیل با متناهی مربع پُر شود،

یعنی با کاشی‌هایی به شکل مربع بتوان آن

مستطیل را کاشی‌کاری کرد، حتماً نسبت

طول به عرض آن عددی گویاست؟

حامد: با این وصف می‌توان دید که شکل